Funktionentheorie: Übungsstunde 3

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

07.10.2025

1 Feedback Serie 1

1. Vorsicht mit dem Vorzeichen bei Argumenten, die mit trigonometrischen Funktionen berechnet werden (Resultate überprüfen).
3. Solche $\iff$-Beweise brauchen meistens zwei Teile: $\implies$ und $\impliedby$.
4. Die Idee ist hier, die Formel zu benutzen, um $\overline{w} = w^4, \overline{w^2} = w^3$ zu finden und damit die Berechnung zu vereinfachen.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Kurven, Kurven- bzw. Pfadintegrale.

2.1 Zusätzliches Material

Definition (Invertierte und zusammengehängte Kurven)**.** *Für eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ definieren wir die invertierte Kurve (Kurve in die andere Richtung):*

$$-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \tag{1}$$
$$t \mapsto \gamma(b + a - t) \tag{2}$$

Für zwei Kurven $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ definieren wir die hintereinandergehängte Kurve:

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C} \tag{3}$$
$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2 \end{cases} \tag{4}$$

Daraus finden wir zusätzliche Eigenschaften des Kurvenintegrals:

- $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$

3 Aufgaben

Besprochene Aufgaben

Aufgabe 1. *Seien* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto (1+i)t$ *und* $f(z) = ze^{z^2}$*. Berechne* $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$*.*

Lösung, Variante 1. Mit der Definition des Pfadintegrals:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+i)te^{(1+i)^2t^2}(1+i)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

$$= \int_0^1 2ite^{2it^2}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{it^2}\right]_0^1 \tag{7}$$

$$= \frac{e^{2i}-1}{2} \tag{8}$$

□

Lösung, Variante 2. Man sieht, dass $f(z)$ eine einfach Stammfunktion hat: $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2} \implies F' = f$. Damit ist die Berechnung hier direkter:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) \tag{9}$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{z^2}\right]_0^{1+i} \tag{10}$$

$$= \frac{e^{2i}-1}{2} \tag{11}$$

□

Je nach Aufgabentyp, Funktion und Kurve kann die direkte Berechnung der Stammfunktion deutlich schneller sein als das Ausrechnen mit der Definition des Pfadintegrals.

Aufgabe 2. *Finde für* $\gamma(0 \le t \le 1) = e^{2\pi i t}$*:*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_{\gamma(2t)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_{\gamma(nt)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_\gamma \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z \qquad \int_\gamma \frac{1}{z+2}\,\mathrm{d}z \tag{12}$$

Lösung. Gemäss der Definition des Pfadintegrals:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} 2\pi i e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t = 2\pi i \tag{13}$$

Ähnlich finden wir das zweite und dritte Integral:

$$\int_{\gamma(2t)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi i t}} 4\pi i e^{4\pi i t}\,\mathrm{d}t = 4\pi i \qquad \int_{\gamma(nt)} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{e^{n\pi i t}} n\pi i e^{n\pi i t}\,\mathrm{d}t = n\pi i \tag{14}$$

Das Resultat für das vierte Integral lässt sich mit einer Stammfunktion begründen oder ausrechnen:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi it}} 2\pi i e^{2\pi it}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 -2\pi i e^{-2\pi it}\,\mathrm{d}t = -\left[e^{-2\pi it}\right]_0^1 = 0 \tag{15}$$

Das letzte Integral kann nicht (direkt) mit Ausrechnen gelöst werden. Die Funktion ist aber auf einer offenen Umgebung, die γ und ihr Inneres beinhaltet, holomorph. Damit kann der Satz von Cauchy (Korollar 3.13) angewendet werden, womit auch dieses Integral verschwindet. □

Aufgabe 3. *Begründe, weshalb* $f(z) = \frac{1}{z}$ *keine Stammfunktion auf* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *besitzt.*

Lösung. In Aufgabe 2 haben wir einen geschlossenen Pfad in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gefunden, der das Integral nicht verschwinden lässt. Damit können wir Satz 3.17: (i) $\iff$ (ii) anwenden, woraus folgt, dass keine auf Ω holomorphe Stammfunktion von f existiert. □

Weitere Aufgaben

- Aufwändig, hier ohne Lösung: $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$

Tipps zur Serie 3 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 3

2. Schau Ableitungen in verschiedenen Richtungen an oder plotte $u(x, y)$.
3. Satz 2.13 hilft.
5. a) Zeige, dass die Behauptung stimmt.
   b) Zeige Injektivität (einfach) und Surjektivität einzeln.
   c) Zeige Injektivität und Surjektivität von g einzeln.