Funktionentheorie: Übungsstunde 7

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

04.11.2025

1 Feedback Serie 5

1. Um die Ableitung und das Integral zu vertauschen, wird beispielsweise Satz 3.33 gebraucht. Damit man nicht die zweite Ableitung des gesamten Ausdrucks berechnen muss, kann man anwenden, dass holomorphe Funktionen harmonisch sind (siehe erste Übungsstunde).

3. Stückweise glatte geschlossene Kurven müssen zusammenhängend sein.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Nullstellen, Maximumsprinzip, Singularitäten.

2.1 Zusätzliches Material

Definition 1 (Ordnung einer Nullstelle). *Für die Ordnung einer Nullstelle kann man folgende Notation benutzen, die weiter unten noch verallgemeinert wird:*

$$\operatorname{ord}_{z_0} f := \min\{n \geq 0 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \tag{1}$$

(Hier ist $n \geq 0$, obwohl somit auch Nullstellen 0-ter Ordnung definiert werden, die keine eigentlichen Nullstellen sind.)

Definition 2 (Singularitäten). *Für ein $a \in \Omega$ offen, f holomorph in $\Omega \setminus \{a\}$ (wobei wir hier explizit eine Funktion betrachten, die (auf jeden Fall formell) auf a undefiniert ist), nennen wir a:*

- *hebbare Singularität, wenn $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$,*
- *Pol(-stelle), wenn $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$,*
- *wesentliche Singularität sonst.*

Diese Definition kann man mit ein bisschen Beweisarbeit in eine einfache Grenzwertform umschreiben: Wir nennen a:

- *hebbare Singularität, wenn* $\lim_{z\to a} f(z) \neq \infty$
- *Pol, wenn* $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$
- *wesentliche Singularität, wenn* $\nexists \lim_{z\to a} f(z)$

Theorem 1 (Riemann-Erweiterungssatz). *Für eine holomorphe Funktion auf einem offenen* $\Omega \setminus \{z_0\}$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. f *ist holomorph fortsetzbar auf* Ω
2. f *ist stetig fortsetzbar auf* Ω
3. $|f(z)| < \infty, \forall z \in B_\varepsilon(z_0)$
4. $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$

Wenn diese Aussagen erfüllt sind, hat f *bei* z_0 *eine hebbare Singularität.*

Lemma 1 (Zusatz zu Satz 3.79 (Polstellen)). *Für eine holomorphe Funktion auf einem offenen* $\Omega \setminus \{z_0\}$ *und einem Pol an* z_0 *gilt:*

(v) $\exists h$ *holomorph auf* $B_r(z_0)$*, sodass* $h(z) \neq 0$ *in* $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ *und* $\operatorname{ord}_{z_0} h = n$*, womit wir schreiben können:* $f(z) = \frac{1}{h(z)}$

Zusammengefasst gilt: Ordnung des Pols von f = *Ordnung der Nullstelle von* $\frac{1}{f}$.

Definition 3 (Ordnung einer Funktion). *Definition 1 kann nun mit Polstellen verallgemeinert werden:*

$$\operatorname{ord}_{z_0} f := \begin{cases} \min\{n \geq 0 \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} & f(z_0) \neq \infty \\ -\min\{n > 0 \mid \lim_{z\to z_0}(z - z_0)^n f(z) \neq \infty\} & \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \end{cases} \tag{2}$$

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Aufgabe 1. *Bestimme die Ordnungen aller Nullstellen und Pole:*

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1} \tag{3}$$

$$f_2(z) = \frac{z}{z^2 - 1} \tag{4}$$

$$f_3(z) = \frac{z^3 - 1}{z^4 - 1} \tag{5}$$

$$f_4(z) = \frac{z^3 - 1}{(z^2 - 1)^2} \tag{6}$$

Tipps zur Serie 7 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 7

1. a) Benutze L'Hôpital (ohne separaten Beweis im komplexen).
   b) Schwierig: Experimentiere mit verschiedenen Funktionen wie in (a).

4. c) Hier ist noch keine Nullstelle vorhanden, aber man kann eine erzeugen.

5. Benutze die Integralformel von Cauchy (Satz 3.31) oder Liouville (Satz 3.39).