Funktionentheorie: Übungsstunde 8

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

11.11.2025

1 Feedback Serie 6

2. Vorsicht, hier ist mit glatt C^∞ gemeint, und nicht nur C^1.

2 Theorie-Recap Semester bisher

Behandelte Themen: Repetitionswoche.

2.1 Cauchy

Es gibt zwei grosse Resultate aus der komplexen Analysis, die beide nach Cauchy benannt sind. Diese beiden Theoreme werden meist folgermassen formuliert:

Als erstes der Integral*satz* von Cauchy, der besagt, dass Integrale von holomorphen Funktionen über geschlossene Pfade unter den richtigen Voraussetzungen verschwinden:

Theorem 1 (Cauchy Integralsatz)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, f holomorph auf Ω und γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

Oder, äquivalent dazu*: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph auf Ω und γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, die homotop zur konstanten Kurve ist, dann gilt Gleichung* (1) *ebenso.*

Die Integral*formel* von Cauchy hingegen besagt, dass der Wert einer holomorphen Funktion an einem Punkt durch das Integral über den Rand einer Kreisscheibe um den Punkt herum bestimmt ist:

Theorem 2 (Cauchy Integralformel)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, f holomorph auf Ω und $\gamma(t) = b + re^{it}$ in Ω, dann gilt $\forall a \in \Omega$:*

$$w(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Um diese beiden Resultate zu beweisen, musste einige Vorarbeit geleistet werden. Die wichtigsten Teile sind (allgemeine Form in Klammern):

- 3.13 (Integralsatz)
- 3.17: Stammfunktion, Integrale verschwinden und sind nur von Endpunkten abhängig
- 3.18: mit hebbaren Singularitäten, Stammfunktion, Integrale verschwinden
- 3.20 (Integralsatz)
- 3.21: mit hebbaren Singularitäten, Stammfunktion, Integrale verschwinden
- 3.31 (Integralformel)
- 3.34, 3.35: analytisch = holomorph, Integrale verschwinden
- 3.36: Morera
- 3.37: hebbare Singularitäten sind für Integrale unwichtig
- 3.39: Liouville

2.2 Der komplexe Logarithmus

Wir wollen eine (holomorphe) Funktion $\log : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ finden, sodass $\exp(\log z) = z$ gilt. Mit der einfachen Idee

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \tag{3}$$

bekommen wir aber Probleme bei der Wohldefiniertheit: Schreibe beispielsweise $1 = e^0 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = \cdots$, was $0 = 2\pi i = 4\pi i = \cdots$ liefert.

Um diese Problem zu lösen, gibt es zwei Ansätze: Wir könnten statt der simplen Argumentfunktion

$$\begin{aligned} \arg : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ re^{i\theta} &\mapsto \theta \end{aligned}$$

die Hauptargumentfunktion (englisch: «principal argument»)

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \to (-\pi, \pi] \tag{4}$$

$$re^{i\theta} \mapsto \begin{cases} \theta \bmod 2\pi & \theta \in [0, \pi] + 2n\pi \\ (\theta \bmod 2\pi) - 2\pi & \theta \in (\pi, 2\pi) + 2n\pi \end{cases} \tag{5}$$

benutzen. Hier wollen wir aber einen anderen Ansatz wählen und definieren dazu den Zweig des Logarithmus:

Definition (Zweig des Logarithmus)**.** *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen, dann ist ein Zweig des Logarithmus auf* Ω *eine holomorphe Funktion* $\log_\Omega : \Omega \to \mathbb{C}$*, sodass* $\exp(\log_\Omega z) = z$*.*

Diese Definition reicht bereits aus, um einige Eigenschaften herzuleiten:

1. $0 \notin \Omega$, denn $e^z \neq 0$.
2. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ reicht, dass $\exp : \mathbb{C} \to \Omega$ surjektiv ist. Aber wir können damit kein holomorphes $f := \log_\Omega$ finden, da
$$\exp(f(z)) = z \implies f'(z) \cdot \exp(f(z)) = 1 \implies f'(z) = \frac{1}{z},$$
was auf Ω zwar holomorph ist, aber nicht alle Integrale über geschlossene Kurven verschwinden.
3. Wenn Ω nun zusätzlich zusammenhängend ist, finden wir zu einem Zweig des Logarithmus ℓ einen anderen Zweig $\tilde{\ell} \iff \ell - \tilde{\ell} \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Denn:
$$\exp(\ell(z)) = z = \exp(\tilde{\ell}(z)) \implies \exp(\tilde{\ell}(z) - \ell(z)) = 1 \implies \tilde{\ell}(z) - \ell(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$
und
$$\tilde{\ell} = \ell + 2\pi i n \implies \exp(\tilde{\ell}(z)) = \exp(\ell(z))\exp(2\pi i n) = z.$$

Diese Eigenschaften lassen sich in einem Theorem verallgemeinern:

Theorem 3. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *einfach zusammenhängend* $\implies \exists$ *ein Zweig des Logarithmus* $\log_\Omega$*.*

Damit können wir die kanonische Wahl finden:

Definition (Hauptzweig des Logarithmus)**.** *Für* $\Omega = \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *ist* $\mathrm{Log} := \log_\Omega$ *der Hauptzweig, sodass* $\mathrm{Log}\, 1 = 0$ *gilt.*

Man kann mit relativ wenig Aufwand zeigen, dass $\mathrm{Log}(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ gilt, solange $\theta \in (-\pi, \pi]$ ist.

Definition (Komplexe Potenzen)**.** *Für einfach zusammenhängendes* $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *definieren wir*
$$z^\alpha := \exp(\alpha \log_\Omega z) \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{6}$$
was nichttrivial vom Logarithmus $\log_\Omega$ *abhängt, denn:* $\exp(\alpha(\log_\Omega z + 2\pi i k)) = z^\alpha e^{2\pi i k\alpha}$.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Besprochene Aufgaben

Aufgabe 1. *Bestimme die Ordnungen aller Nullstellen und Pole:*

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1} \qquad f_2(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$
$$f_3(z) = \frac{z^3 - 1}{z^4 - 1} \qquad f_4(z) = \frac{z^3 - 1}{(z^2 - 1)^2}$$

Lösung.

$$\begin{array}{rrr}
\operatorname{ord}_0 f_1 = -1 & & \\
\operatorname{ord}_0 f_2 = 1 & \operatorname{ord}_{\pm 1} f_2 = -1 & \\
\operatorname{ord}_{e^{\pm 2\pi i/3}} f_3 = 1 & \operatorname{ord}_{\pm i,-1} f_3 = -1 & \operatorname{ord}_1 f_3 = 0 \\
\operatorname{ord}_{e^{\pm 2\pi i/3}} f_4 = 1 & \operatorname{ord}_{-1} f_4 = -2 & \operatorname{ord}_1 f_4 = -1
\end{array}$$

Die Lösung kann auf verschiedene Arten berechnet werden: mit den Definitionen der Ordnungen von Nullstellen und Polstellen, Verknüpfung von Funktionen, L'Hôpital, Grenzwerte, etc. □

Aufgabe 2. *Leite aus Aufgabe 1 eine allgemeine Formel für die Ordnung von Funktionen $f = \frac{g}{h}, \tilde{f} = g \cdot h$ für holomorphe g, h her.*

Lösung.

$$\operatorname{ord}_{z_0} f = \operatorname{ord}_{z_0} \frac{g}{h} = \operatorname{ord}_{z_0} g - \operatorname{ord}_{z_0} h, \qquad \operatorname{ord}_{z_0} \tilde{f} = \operatorname{ord}_{z_0}(gh) = \operatorname{ord}_{z_0} g + \operatorname{ord}_{z_0} h \tag{7}$$

Diese Formeln können mit direkter Anwendung der Definitionen oder Induktion rigoros bewiesen werden. □

Tipps zur Serie 8 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 8

3. Benutze den Hinweis und betrachte, was mit Beträgen passiert.

4. Ganz heisst hier wieder holomorph auf $\mathbb{C}$. Betrachte Beispiele und versuche zu verallgemeinern.

5. b) Konstruiere ein passendes Gitter und versuche damit die Funktion zu charakterisieren.