

Funktionentheorie: Übungsstunde 9

Florian Frauenfelder

<https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/>

18.11.2025

1 Feedback Serie 7

1. b) Die Idee war hier, die Funktion aus (a) zu verwenden, um eine solche Kurve zu konstruieren, die geschlossen und stückweise glatt ist und einen Bereich für *jede* natürlich Zahl als Windungszahl hat (also abzählbar unendlich viele Teilbereiche!).
3. a) Wenn Grenzwerte $\frac{0}{0}$ ergeben, dürfen wir auch in der komplexen Analysis die Regel von L'Hôpital verwenden.
4. c) Mit Multiplizität ist hier die Ordnung der Nullstelle von $\cos(z^3)^3 - 1$ gemeint.
5. Um Liouville anzuwenden, muss der Betrag der Funktion auf ganz \mathbb{C} durch eine Konstante $\in \mathbb{R}_+$ beschränkt sein. Die Beschränkung auf einer Untermenge oder durch eine andere Funktion reicht nicht, weshalb unsere Hilfsfunktion $\frac{z}{F(z)}$ sein muss, welche $\frac{|z|}{|F(z)|} < 1$ erfüllt.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Casorati-Weierstrass, Ketten und Zyklen, einfacher Zusammenhang, Cauchy.

2.1 Zusätzliches Material

Mit Casorati-Weierstrass (Das Bild um eine wesentliche Singularität ist dicht in \mathbb{C} .) lassen sich zwei weitere interessante Resultate zeigen:

Theorem 1 (Kleiner Satz von Picard). *Das Bild jeder nicht-konstanten ganzen Funktion ist \mathbb{C} , mit höchstens einer Ausnahme.*

Beispiel: $\exp(z)$ mit Ausnahme 0.

Theorem 2 (Grosser Satz von Picard). *Das Bild einer Funktion um eine wesentliche Singularität nimmt jeden Wert in \mathbb{C} , mit höchstens einer Ausnahme, unendlich oft an.*

Beispiel: $\exp(1/z)$ um 0 mit Ausnahme 0.

Definition (Einfach zusammenhängend). $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heisst einfach zusammenhängend $\iff \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend $\iff \Omega$ hat keine Löcher $\iff \mathbb{C} \setminus \Omega$ hat Windungszahl 0 für jede Kurve.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx oder FSxx sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:
<https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie>

Besprochene Aufgaben

- FS06: 5a

Tipps zur Serie 9 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 9

Empfohlene Reihenfolge: 1, 2, 5, 3, 4

1. Benutze verschiedene Definitionen und Äquivalenzen zu einfachem Zusammenhang.
2.
 - a) Ein Beweis mit Kontraposition und/oder Widerspruch kann einfacher sein als die direkte Variante.
 - b) Eine Skizze mit Begründung reicht, aber eine explizite Formel ist nicht schwierig.
3. Benutze 3.84 (Casorati-Weierstrass) und Ausschlussverfahren.
4. Benutze die bisherigen Polynom-Aufgaben der Serien.
5.
 - b) Benutze wieder den Offenheitssatz (hier kann ein Widerspruchsbeweis wieder einfacher sein).