

# Funktionentheorie: Übungsstunde 9

Florian Frauenfelder

<https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/>

18.11.2025

## 1 Feedback Serie 7

1. b) Die Idee war hier, die Funktion aus (a) zu verwenden, um eine solche Kurve zu konstruieren, die geschlossen und stückweise glatt ist und einen Bereich für *jede* natürliche Zahl als Windungszahl hat (also abzählbar unendlich viele Teilbereiche!).
3. a) Wenn Grenzwerte  $\frac{0}{0}$  ergeben, dürfen wir auch in der komplexen Analysis die Regel von L'Hôpital verwenden.
4. c) Mit Multiplizität ist hier die Ordnung der Nullstelle von  $\cos(z^3)^3 - 1$  gemeint.
5. Um Liouville anzuwenden, muss der Betrag der Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  durch eine Konstante  $\in \mathbb{R}_+$  beschränkt sein. Die Beschränkung auf einer Untermenge oder durch eine andere Funktion reicht nicht, weshalb unsere Hilfsfunktion  $\frac{z}{F(z)}$  sein muss, welche  $\frac{|z|}{|F(z)|} < 1$  erfüllt.

## 2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Casorati-Weierstrass, Ketten und Zyklen, einfacher Zusammenhang, Cauchy.

### 2.1 Zusätzliches Material

Mit Casorati-Weierstrass (Das Bild um eine wesentliche Singularität ist dicht in  $\mathbb{C}$ .) lassen sich zwei weitere interessante Resultate zeigen:

**Theorem 1** (Kleiner Satz von Picard). *Das Bild jeder nicht-konstanten ganzen Funktion ist  $\mathbb{C}$ , mit höchstens einer Ausnahme.*

Beispiel:  $\exp(z)$  mit Ausnahme 0.

**Theorem 2** (Grosser Satz von Picard). *Das Bild einer Funktion um eine wesentliche Singularität nimmt jeden Wert in  $\mathbb{C}$ , mit höchstens einer Ausnahme, unendlich oft an.*

Beispiel:  $\exp(1/z)$  um 0 mit Ausnahme 0.

**Definition** (Einfach zusammenhängend).  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  heisst *einfach zusammenhängend*  $\iff \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$  ist zusammenhängend  $\iff \Omega$  hat keine Löcher  $\iff \mathbb{C} \setminus \Omega$  hat Windungszahl 0 für jede Kurve.

### 3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx oder FSxx sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:  
<https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie>

#### Besprochene Aufgaben

- FS06: 5a

Tipps zur Serie 9 auf der nächsten Seite!

## 4 Tipps zur Serie 9

Empfohlene Reihenfolge: 1, 2, 5, 3, 4

1. Benutze verschiedene Definitionen und Äquivalenzen zu einfachem Zusammenhang.
2.
  - a) Ein Beweis mit Kontraposition und/oder Widerspruch kann einfacher sein als die direkte Variante.
  - b) Eine Skizze mit Begründung reicht, aber eine explizite Formel ist nicht schwierig.
3. Benutze 3.84 (Casorati-Weierstrass) und Ausschlussverfahren.
4. Benutze die bisherigen Polynom-Aufgaben der Serien.
5.
  - b) Benutze wieder den Offenheitssatz (hier kann ein Widerspruchsbeweis wieder einfacher sein).