

Funktionentheorie: Übungsstunde 10

Florian Frauenfelder

<https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/>

25.11.2025

1 Feedback Serie 8

1. Im Allgemeinen kann es bei aufwändigen Funktionen einfacher sein, die (bekannte) Taylorreihe aufzuschreiben anstatt abzuleiten.
 - c) Vorsicht: Obwohl es hier nur um den Hauptzweig des Logarithmus geht, gilt trotzdem noch $e^{z^2} = 1 \iff z^2 = 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$.
2. In der Musterlösung sind hebbare Nullstellen nicht konsistent definiert: Wenn man die Laurent- oder Taylorreihe einer Funktion mit hebbarer Singularität aufschreibt, wird man diese «verlieren» (etwas ähnliches wurde bei (c) gemacht, wo man theoretisch immer noch Definitionslücken haben kann). Allgemeine Empfehlung: Schreibt bei solchen Aufgaben explizit hin, ob in der ursprünglich Form der Funktion (ohne Kürzen oder Umformen) eine Definitionslücke vorhanden wäre. (Leider ist auch die Definition im Skript etwas unsauber, da jede Funktion, die auf Ω holomorph ist, auch auf Ω ohne einzelne Punkte holomorph ist.)
 - e) Vorsicht: Auf \mathbb{C} (oder spezifischer auf $i\mathbb{R}$ sind \sin, \cos etc. nicht beschränkt.
4. Nicht alle Zahlen der Form $e^{2\pi i \theta}$ sind Einheitswurzeln; das gilt nur, wenn $\theta \in \mathbb{Q}$ ist.
5. Liouville gilt nur, wenn die Funktion auf ganz \mathbb{C} holomorph und beschränkt ist; bei dieser Aufgabe muss man über das Gitter $\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}$ argumentieren, damit man Liouville anwenden kann.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Cauchy Integralsatz, Homologie, Laurentreihen.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx oder FSxx sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:
<https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie>

Besprochene Aufgaben

- FS06: 3

Weitere Aufgaben

- HS06: 2

Tipps zur Serie 10 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 10

Empfohlene Reihenfolge: 1, 3, 4, 2, 5.

2. Benutze bereits bekannte Taylorreihen.
3. Benutze bereits bekannte Taylorreihen, auch aus der Vorlesung.
4. Berechne und benutze die Laurentreihe.
5.
 - a) Schau dir die Definition und Beispiele aus dem Skript an (4.35ff).
 - b) Schwierig: Kontraposition/Widerspruch kann bei der Beweisführung helfen.