Funktionentheorie: Übungsstunde 11

Florian Frauenfelder
`https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/`

02.12.2025

1 Feedback Serie 9

1. b) Einfach zusammenhängende Mengen müssen auch immer zusammenhängend sein. Wenn eine Menge Ω nicht zusammenhängend ist, aber das Kriterium

   $$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega \text{ ist zusammenhängend}$$

   erfüllt, ist sie deswegen noch nicht zusammenhängend. Vorsicht bei einzelnen Ausnahmen wie $z = 0$ in dieser Aufgabe!

3. Hier können auch nicht-isolierte Polstellen auftreten, wie bei $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ um 0.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Laurentreihen, Residuensatz, Residuen berechnen.

2.1 Zusätzliches Material

Eine andere Version von Lemma 4.45:

Lemma 1 (4.45)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf $\Omega \setminus \{a\}$, dann gilt:*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}((z-a)^n f(z)). \tag{1}$$

Ein allgemeines Rezept, um Integrale in der Funktionentheorie zu berechnen:

1. Integral als Kurvenintegral umschreiben, allenfalls mit
   a) Substitution,
   b) Schliessen der Kurve,
   c) Teile des Integrals «verschwinden lassen» mithilfe von Grenzwerten,
2. Residuen berechnen und
3. Residuensatz anwenden.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Ein paar allgemeine Aufgaben und Beispiele zu häufigen Integralen:

Aufgabe 1. *Zeige, dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Lösung. Wir integrieren über die obere Halbebene mit einem grossen Halbkreis, geschlossen über die reelle Achse. Das benötigte Residuum lässt sich leicht berechnen:

$$\mathrm{Res}_{ai} \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = -\frac{i}{4a^3}.$$

□

Aufgabe 2. *Berechne*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung. Wir benutzen wieder den grossen geschlossenen Halbkreis, aber mit

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}, \tag{2}$$

da wir sonst Probleme mit den Grenzwerten $\to \infty$ erhalten, da $\cos(it) = \cosh t$ für $t \in \mathbb{R}$ in beide Richtungen exponentiell wächst, wir aber mit

$$|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y} \leq 1$$

den Grenzwert problemlos berechnen können (solange $\mathrm{Im}\, z > 0$). □

Aufgabe 3. *Berechne*

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ *und* $Q(x,y) \neq 0, \forall x^2+y^2 = 1$.

Lösung. Schreibe

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \tag{3}$$

und versuche, durch erweitern des Bruchs die inversen z-Terme zu minimieren, um mit einfachen Polynomen arbeiten zu können und die bereits bekannten Methoden zu nutzen.

□

Weitere Aufgaben

- FS05: 4, 6

Tipps zur Serie 11 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 11

1. Benutze den Hinweis und gehe ähnlich wie in der Vorlesung und in der Übungsstunde vor.

2. Benutze geometrische Reihen und den Residuensatz.

3. Multipliziere einzelne Laurentreihen.

4. Benutze einen geeigneten Pfad, der $z = 0$ nicht beinhaltet.

5. $N \in \mathbb{N}$

   a) Plotte die Funktion (beispielsweise auf `https://samuelj.li`) für ein graphisches Verständnis. Mache Fallunterscheideung und benutze, dass cot ungerade ist, und schreibe ihn bei Bedarf mit exp um.

   b) Benutze die Lemmas zu Residuen und die Laurentreihe von cot.

   c) Benutze (b) und schreibe coth um.

   d) Stelle die Reihe aus (c) um.