Funktionentheorie: Übungsstunde 12

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

09.12.2025

1 Feedback Serie 10

2. a) Vorsicht mit den Indizes bei der Multiplikation von Reihen.
   c) Versuche immer mögliche Symmetrien der Funktionen auszunutzen, um das Problem zu vereinfachen.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Residuen, meromorphe Funktionen, Prinzip vom Argument, Rouché, Riemannscher Abbildungssatz.

2.1 Zusätzliches Material

Zu meromorphen Funktionen lassen sich ein paar interessante Dinge beweisen (hier nur die Aussage ohne Beweis):

Lemma 1. *Wenn $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der meromorphen Funktionen auf einem Gebiet Ω ist, dann gilt, falls Ω zusammenhängend ist:*

$$\mathcal{M}(\Omega) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \text{ holomorph auf } \Omega, g \not\equiv 0 \right\}, \tag{1}$$

und sogar (wenn Singularitäten bei ∞ so wie in den bisherigen Serien definiert werden):

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{C}[z], q \not\equiv 0 \right\}. \tag{2}$$

Eine andere Form des Prinzips vom Argument:

Theorem 1 (4.64: Prinzip vom Argument)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit Nullstelle oder Polstelle $c \in \Omega$, dann gilt:*

$$\operatorname{Res}_c \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_c f \tag{3}$$

Eine andere Form des Satzes von Rouché:

Theorem 2 (4.66: Rouché)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, γ null-homolog und berandet $G, \overline{G} \subseteq \Omega$, dann gilt für holomorphe f, g mit der Eigenschaft*

$$|f(z)| > |g(z)|, \forall z \in \Gamma,$$

dass f und $f + g$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Vielfachheit) in G haben.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Besprochene Aufgaben

Aufgabe 1. *Finde die Anzahl Nullstellen von $2z^4 - 5z + 2$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.*

Lösung. Für $|z| = 1$ gilt $|-5z| > |2z^4 + 2|$, womit innerhalb der Einheitskreisscheibe eine Nullstelle und damit ausserhalb 3 Nullstellen sind. $\square$

Aufgabe 2. *Finde die Anzahl Nullstellen von $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.*

Lösung. Für $|z| = 1$ gilt $|-5z^4| > |z^7 + iz^2 - 2|$, womit innerhalb der Einheitskreisscheibe vier Nullstellen sind. $\square$

Weitere Aufgaben

Aufgabe 3. *Finde die Anzahl Nullstellen von $z^5 + iz^3 - 4z + i$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.*

Lösung. Für $|z| = 1$ gilt $|-4z| > |z^5 + iz^3 + i|$, womit innerhalb der Einheitskreisscheibe eine Nullstelle ist, und für $|z| = 2$ gilt $|z^5| > |iz^3 - 4z + i|$, womit innerhalb 5 Nullstellen sind, also im gefragten Gebiet 4 Nullstellen sind. $\square$

Tipps zur Serie 12 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 12

1. Benutze das Prinzip vom Argument und Lemma 4.65.
2. Benutze (1).
3. a) Benutze (1) und (2) und gehe ähnlich vor.
   b) Versuche, das Integral möglichst zu vereinfachen und Grenzwerte anzuwenden.
4. Benutze Rouché mit geeigneten Funktionen.
5. Benutze Rouché.
   c) Mit dem «grossen Halbkreis» ist hier $R \to \infty$ gemeint. Erinnere dich an Analysis I, was man bei solchen Grenzwerten und Brüchen tun kann.